

Theoretical and computational neuroscience application from physics

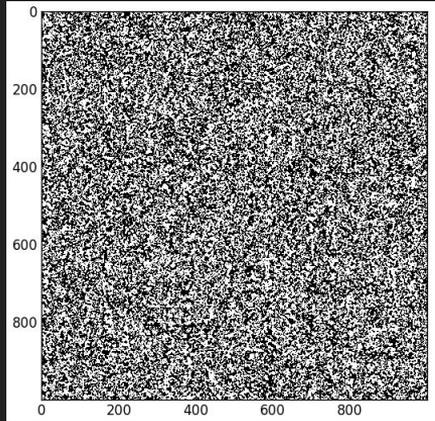
Teo Fantacci - PhD at Sant'Anna di Pisa

Sommario

1. Introduzione argomento
2. Ponte fra fisica e neuroscienze
3. Modello di Hopfield
4. Apprendimento e tipologie
5. Matematica per implementare il modello
6. Estensione - lavoro di tesi
7. Conclusioni
8. Bonus

Topic introduction

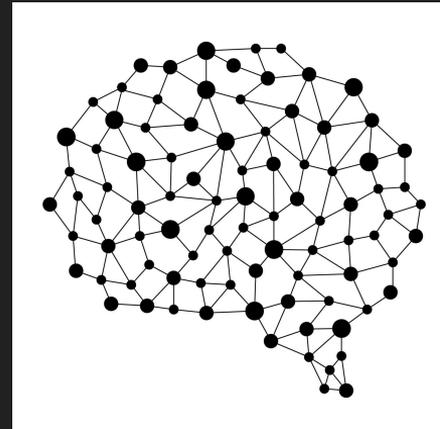
Modello di Ising



“More is different”.
P. W. Anderson (1972)

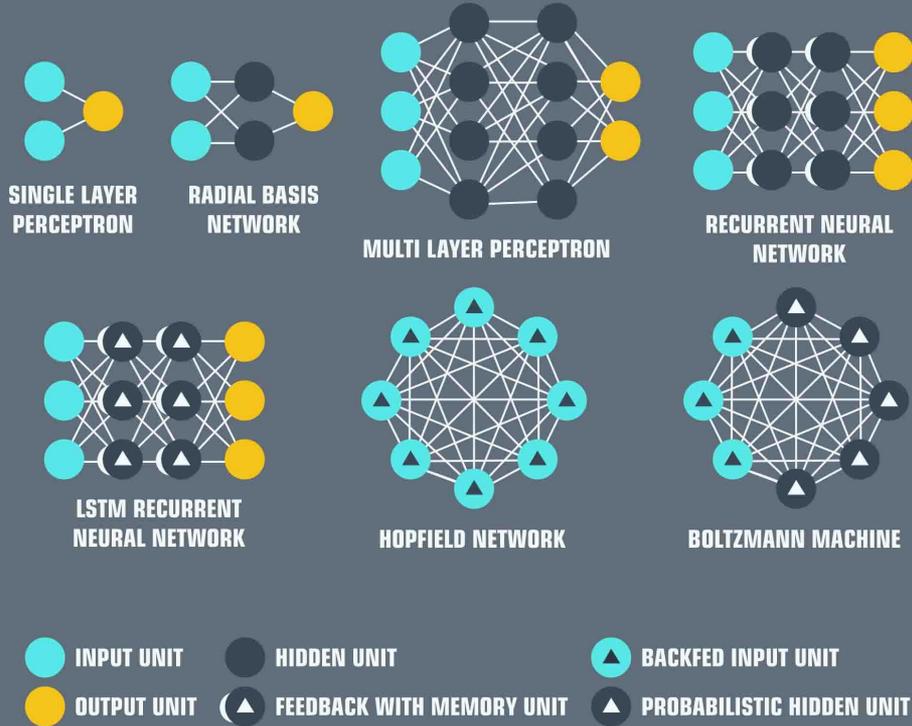
Quotes

Reti neurali artificiali (ANN)



“Neurons that fire together,
wire together”.
D. O. Hebb (1949)

NEURAL NETWORK ARCHITECTURE TYPES



Focus:
Modello di
Hopfield

Modello di Ising per il ferromagnetismo

Ising, E. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. Z. Physik 31, 253–258 (1925)

Prima soluzione teorica del modello di ferromagnetismo (1-D).

- Unità binarie
- Rappresentazione spin $\{-1, 1\}$
- Interazione costante fra tutte le coppie di spin primi vicini
- Esempio di sistema complesso e fenomeni emergenti

$$H[\mathbf{s}] = -J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j$$

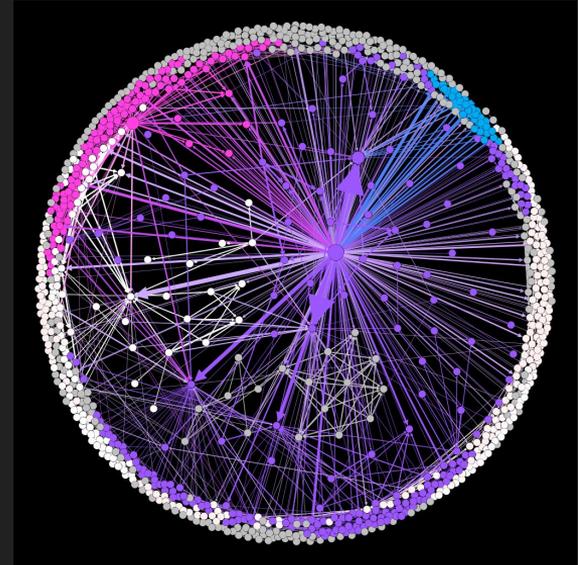
Collegare l'attività neurale al modello di Ising

Spins \longrightarrow Neuroni (Nodi)

Pesi \longrightarrow Sinapsi
(Connessioni)

Introduzione dinamica temporale

Funzione gradino \longrightarrow Potenziale di azione
(Funzione di attivazione)



Modello di Hopfield - intro?

Stato o Configurazione del sistema

$$\mathbf{s}(t) = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}_N$$

Connessi NxN (All-to-all)
No auto-interazione

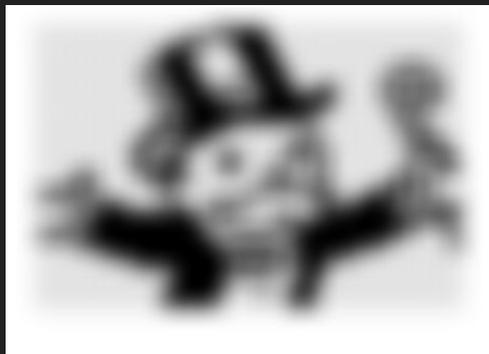
Attività binaria dei singoli neuroni

$$s_i = \{1, -1\}$$

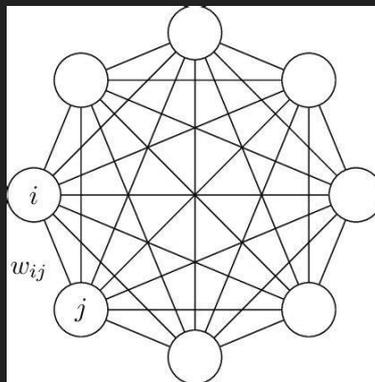
$$\begin{pmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} & \dots & J_{1N} \\ J_{21} & 0 & J_{23} & \dots & J_{2N} \\ J_{31} & J_{32} & 0 & \dots & J_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{N1} & J_{N2} & J_{N3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Quale proprietà del cervello modella? Memoria associativa

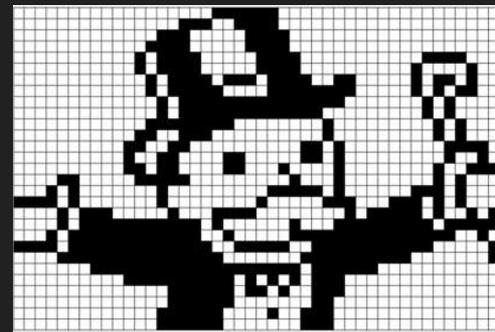
Input



Dinamica del sistema



Output



Sotto quali assunzioni considerare delle configurazioni di attività neurale come ricordi o memorie?

Connessionismo

L'approccio del connessionismo assume che i processi mentali possono essere descritti da un grande numero di semplici unità interagenti.

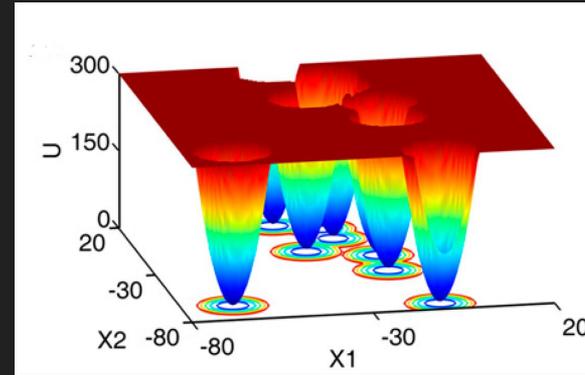
In questa prospettiva la configurazione di attività della rete neurale può essere interpretata come l'approssimazione di una memoria.

McCulloch, Warren S., and Walter Pitts.
"A logical calculus of the ideas immanent
in nervous activity." *The bulletin of
mathematical biophysics* 5 (1943)

Amit, D. J., and Modelling Brain Function.
"The world of attractor neural networks."
Modeling Brain Function (1989).

Connessionismo

Un'altra possibile descrizione delle proprietà delle reti neurali è quello delle basi di attrazione nella dinamica del sistema.



Un'estensione ancora più plausibile che sta acquistando consenso negli ultimi anni è quella delle memorie come traiettorie di configurazioni.

Spalla, Davide, Isabel Maria Cornacchia, and Alessandro Treves. "Continuous Attractors for Dynamic Memories." *eLife* 10 (September 14, 2021): e69499

Yan, Han, Lei Zhao, Liang Hu, Xidi Wang, Erkang Wang, and Jin Wang. "Nonequilibrium Landscape Theory of Neural Networks." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110, no. 45 (November 5, 2013).

Tipologie di apprendimento

Locale

Amit, D. J., H. Gutfreund, and H. Sompolinsky. "Information storage in neural networks with low levels of activity." *Physical Review* (1987)

Legge di apprendimento Hebbiana per costruire la matrice dei pesi.

Tsodyks, M. V., and M. V. Feigel'man. "The enhanced storage capacity in neural networks with low activity level." *Europhysics Letters* 6.2 (1988):

Globale

Gardner, Elizabeth. "Maximum storage capacity in neural networks." *Europhysics letters* 4.4 (1987): 481.

Ottimizzazione su tutti i possibili pesi.

Dimostrano che le assunzioni limitano il modello

Come immagazzinare i ricordi nella rete?

Il principio alla base della costruzione della matrice dei pesi:
Apprendimento locale.

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu}, \quad J_{ii} = 0 \quad \text{and} \quad \mu = 1, \dots, p$$

Maggiore il numero di memorie con gli stessi neuroni aventi la stessa attività, maggiore la probabilità di passare informazione.

Distribuzione di probabilità delle configurazioni

Massimizzare la quantità di ricordi

Configurazioni - Memorie

Estrate in maniera
casuale e indipendente

$$P(\xi_i^\mu) = \frac{1}{2} \delta(\xi_i^\mu - 1) + \frac{1}{2} \delta(\xi_i^\mu + 1)$$

Configurazioni scorrelate

Dinamica del sistema

Funzione di attivazione  Media pesata con soglia

$$S_i(t + 1) = \text{sgn} \left(\sum_{i,j, i \neq j} J_{ij} S_j(t) \right)$$

La dinamica può essere

Sincrona

Asincrona

Valutazione della configurazione a convergenza

Stato asintotico
della dinamica

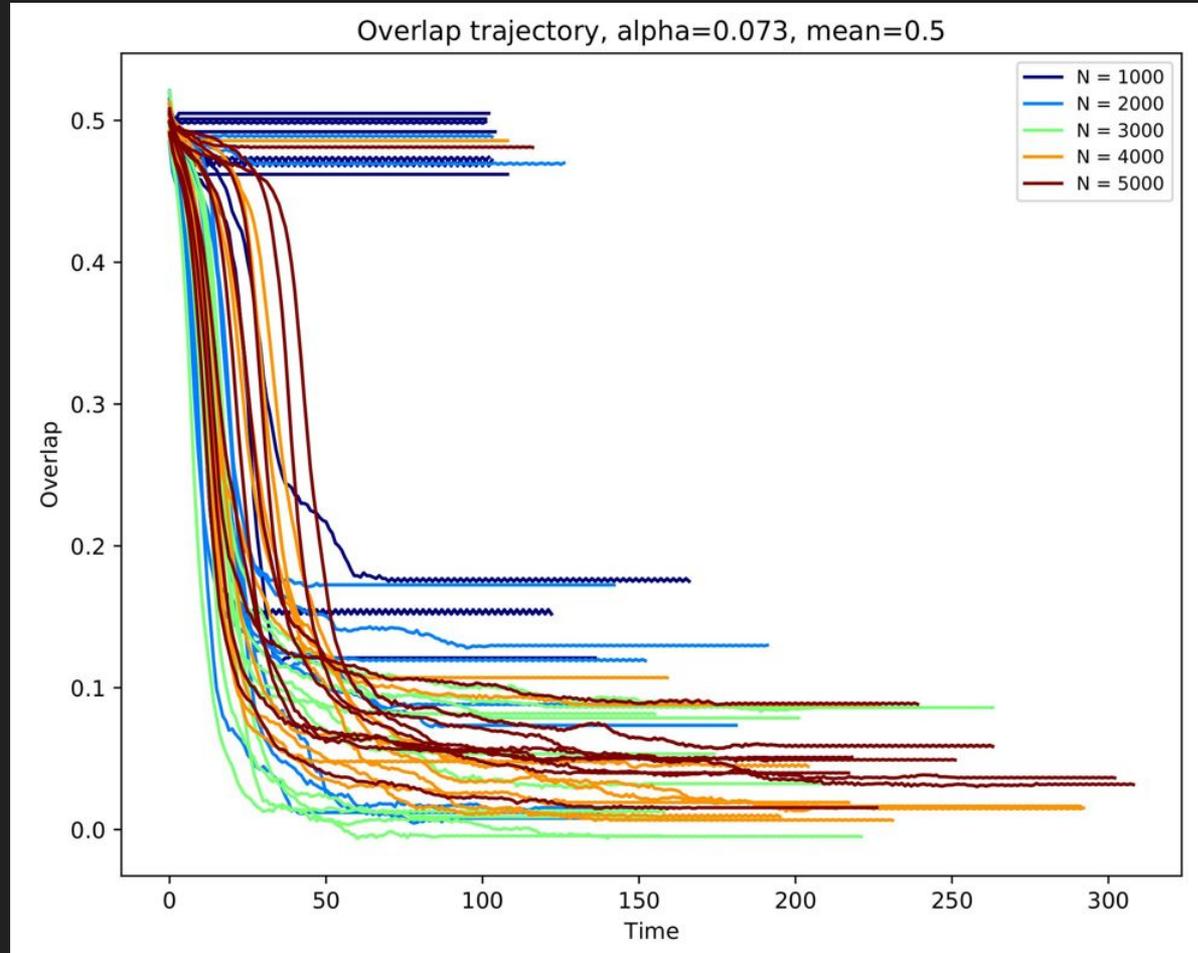
Distanza
binaria fra
configurazioni

Distanza di
Hamming,
modificata.

$$m^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu S_i$$

Sovrapposizione (**Overlap**) memoria e stato asintotico

Traiettorie
singole



Parentesi stabilità - conti

Condizione
di stabilità
dinamica

$$S_i h_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Media pesata
Somma degli
input

$$h_i \{S\} = \frac{1}{N} \sum_{j, j \neq i}^N \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu S_j$$

Verifica
stabilità

$$\xi_1^1 h_1 = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j, j \neq 1}^N \sum_{\mu > 1}^p \xi_1^1 \xi_1^\mu \xi_j^\mu \xi_j^1 > 0$$

Componente
segnale per $\mu=1$

Componente di rumore

Regimi di apprendimento

$$P \ll N$$

Signal-to-noise analysis
Calcoli fatti in precedenza

$$P \sim N$$

Metodo delle repliche
Premio nobel G.Parisi

La complessità derivante dall'alto numero di ricordi, non permette una semplice analisi. Utilizzo di strumenti dalla teoria di vetri di spin.

Sia interessati al massimo numero di ricordi immagazzinabili e recuperabili con buona accuratezza. Questa quantità è chiamata Storage Capacity (SC), ovvero il massimo valore di P/N nel limite termodinamico.

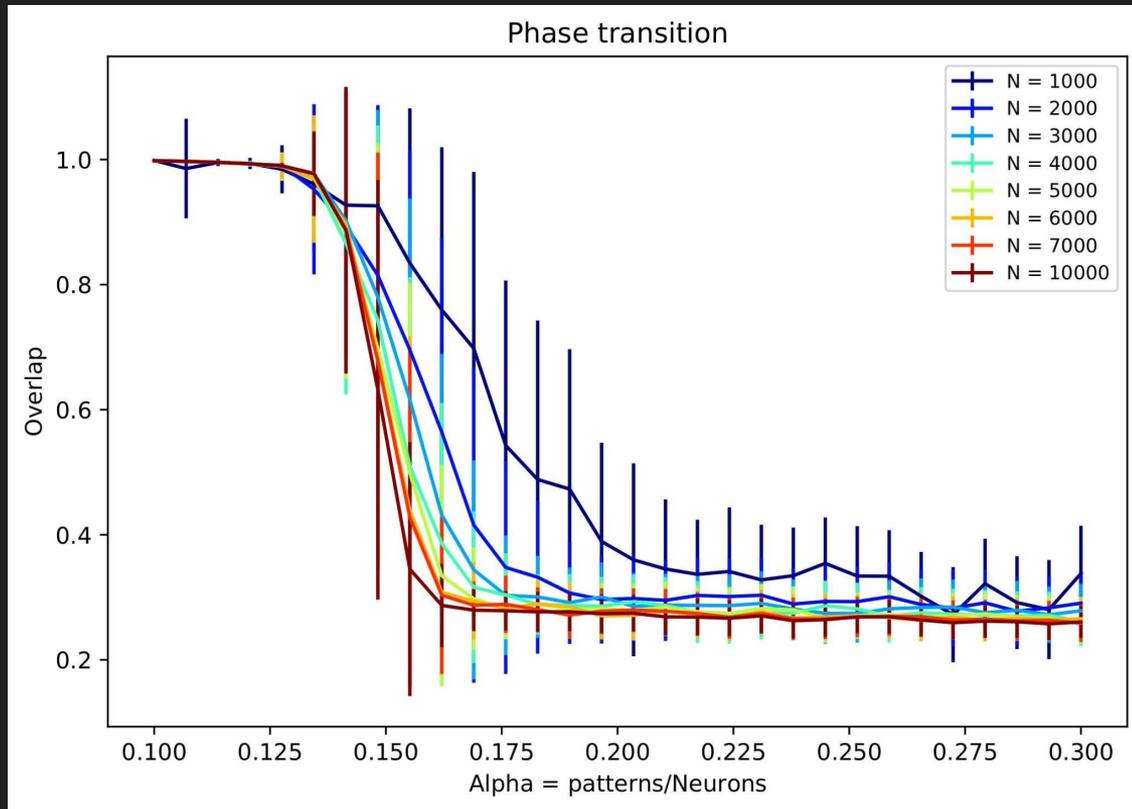
Transizione di fase

Se prendiamo la media, possiamo definire l'overlap medio dei ricordi.

Osservando il valore dell'overlap al variare della frazione dei ricordi immagazzinati.

Il fenomeno emergente che risulta nella variazione di P/N è una transizione di fase.

Il parametro d'ordine in questo caso è la sovrapposizione media dei ricordi, la quale passa da circa 1 a circa 0, superato il punto critico.



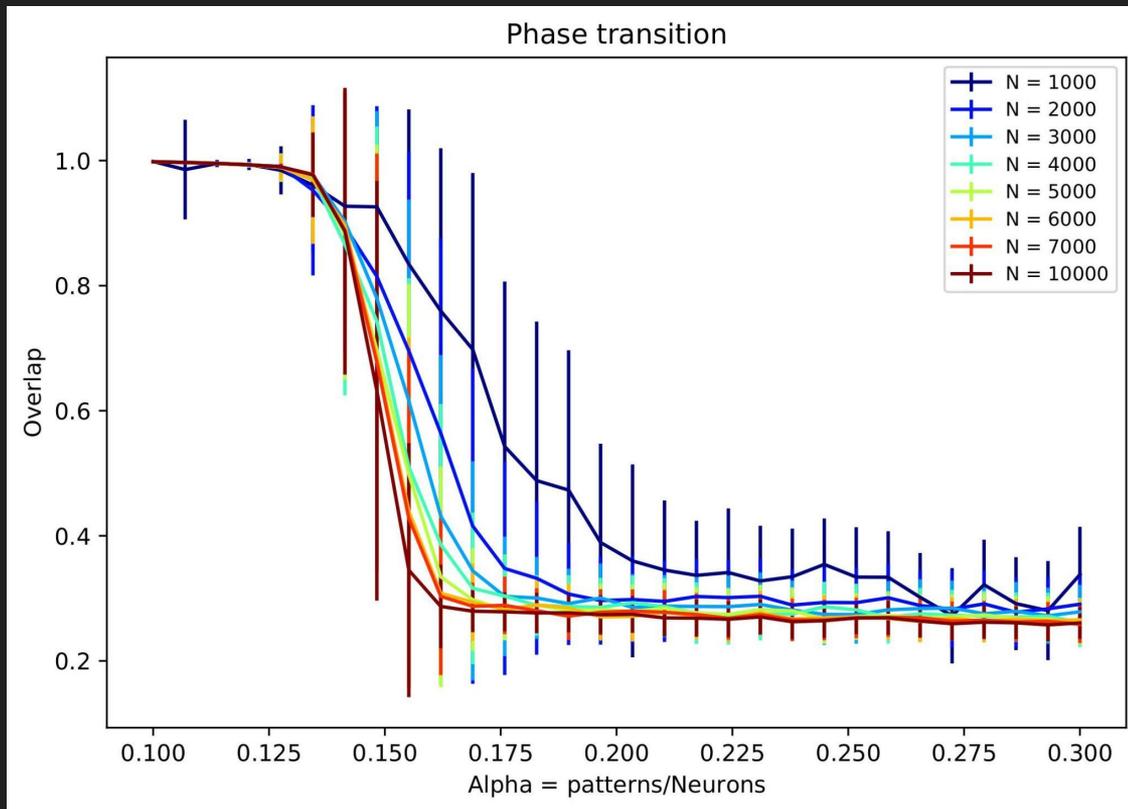
Transizione di fase

Definiamo $\alpha=P/N$ la frazione di ricordi rispetto al numero di neuroni.

I calcoli teorici, risultano in un valore di $\alpha=0.138$ nel limite termodinamico.

Si può notare l'effetto di scala finita (finite-size scaling).

Ancora non nel limite termpdinamico



Le modifiche che ho implementato

- Attività media del sistema

$$0 < a < 0.5$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i = a$$

$$P(\xi) = a\delta(\xi - 1) + (1 - a)\delta(\xi)$$

$$m^\mu = \frac{1}{aN} \sum_i (\xi_i^\mu - a) S_i(t)$$

- Rappresentazione $\{0,1\}$ dei nodi.

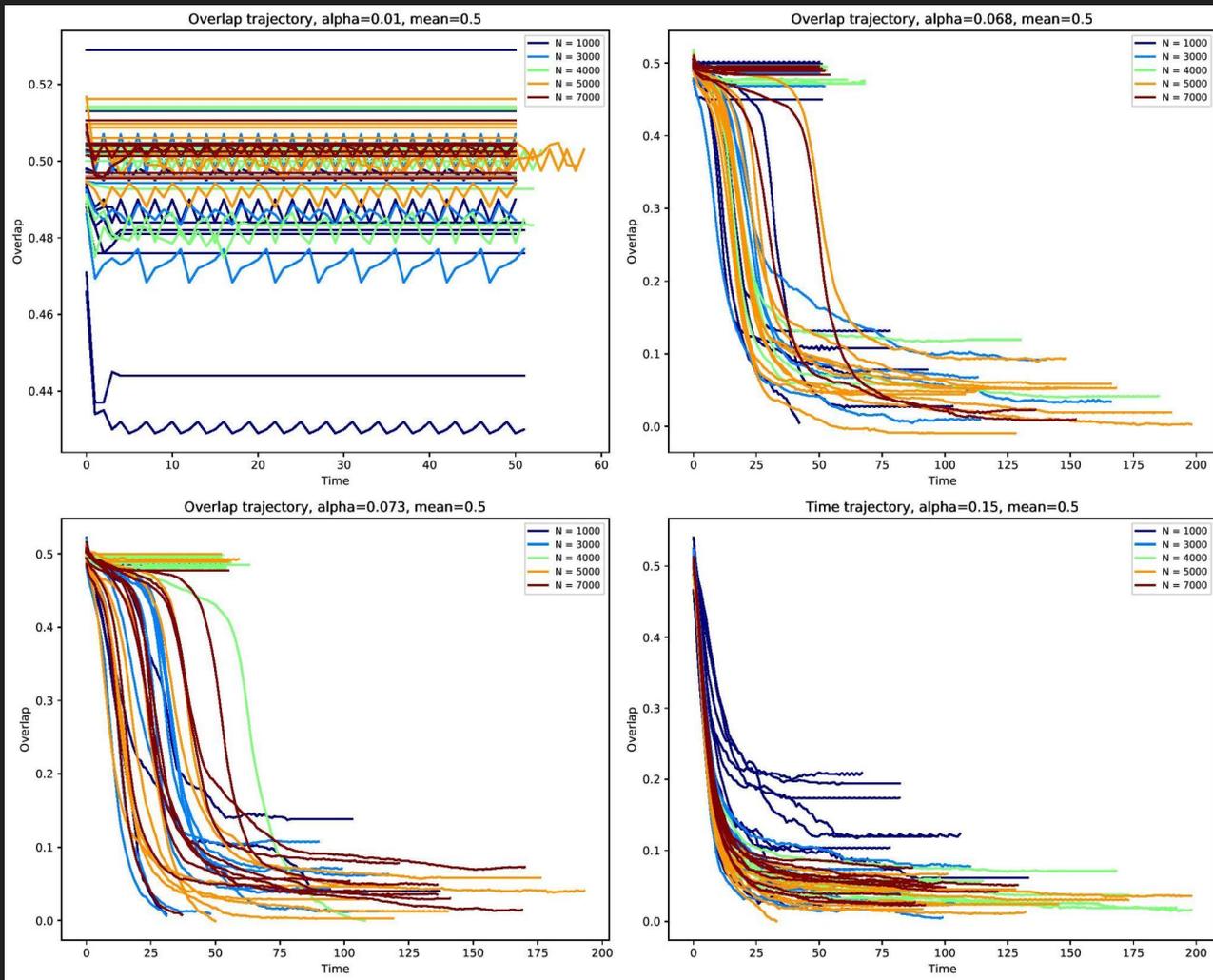
$$\mathbf{V}(t) = \{0, 1\}$$

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p (\xi_i^\mu - a) (\xi_j^\mu - a)$$

$$S_i(t + 1) = H \left(\sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) - \theta \right)$$

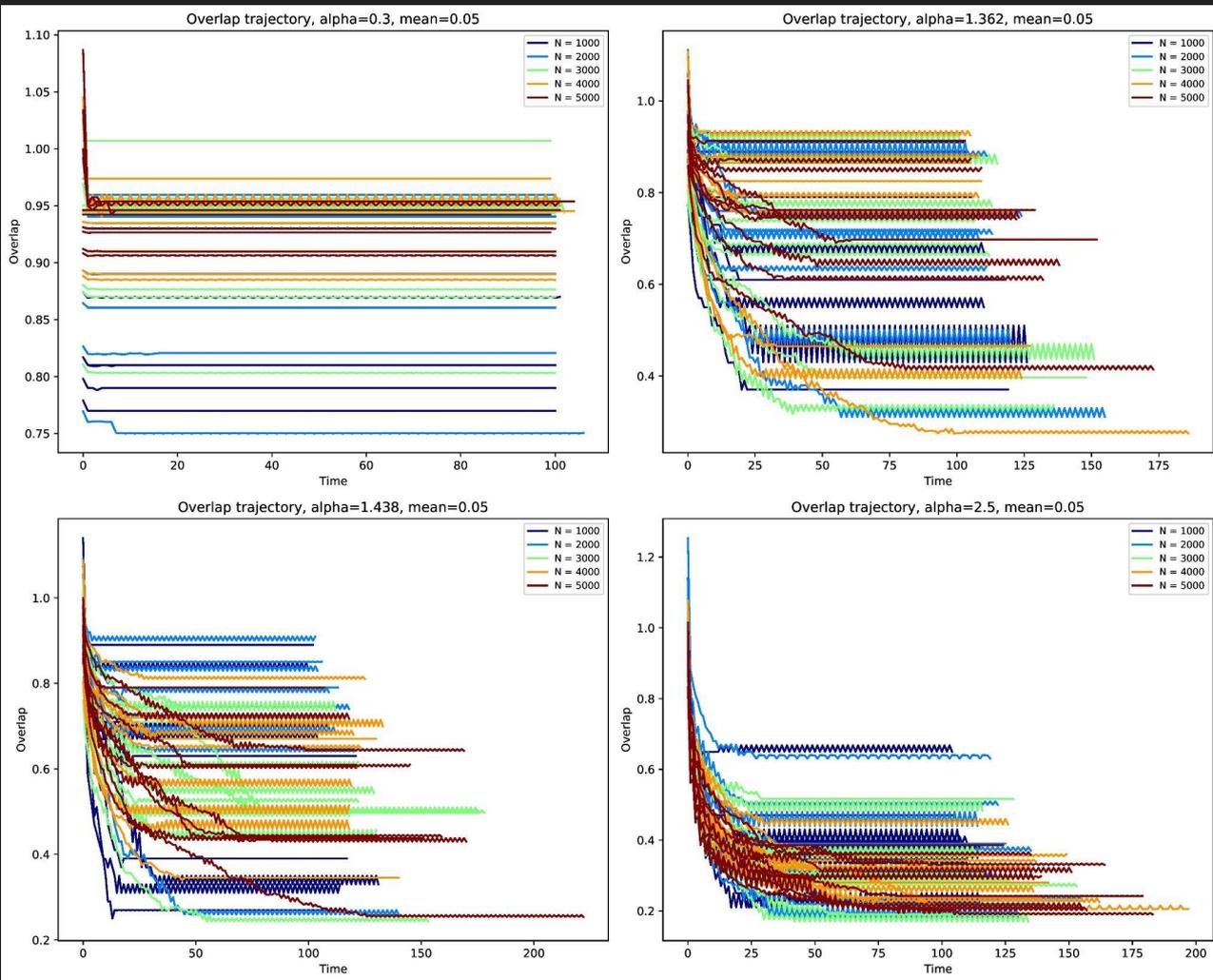
Risultati

Attività media
=0.5



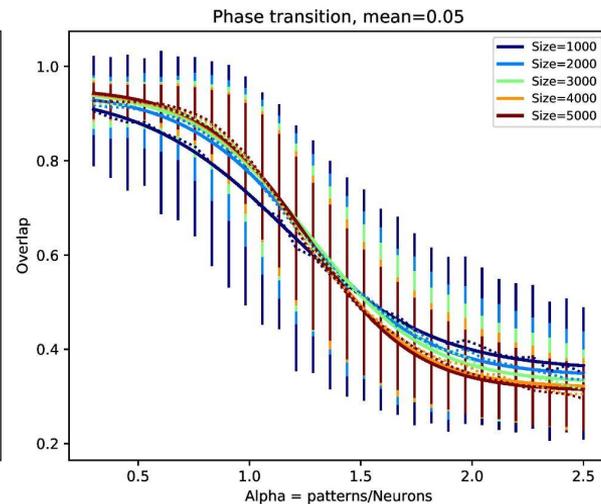
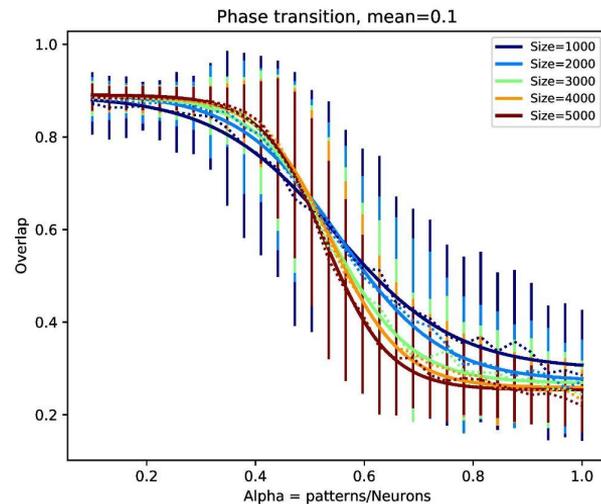
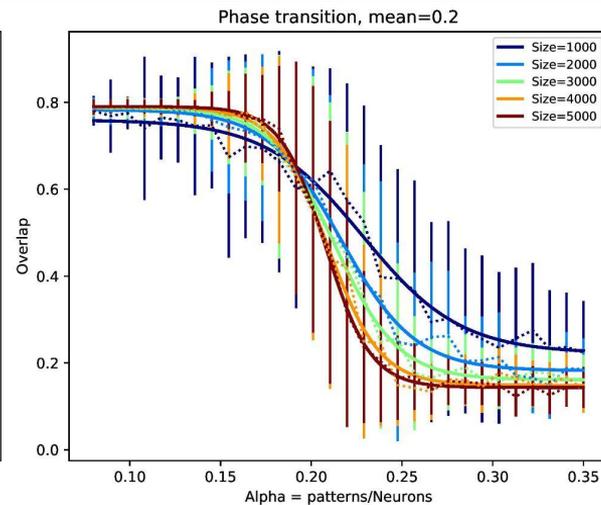
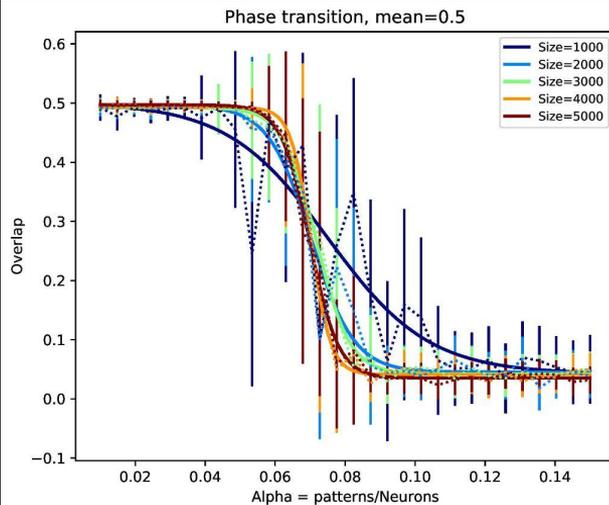
Risultati

Attività media
=0.05



Risultati

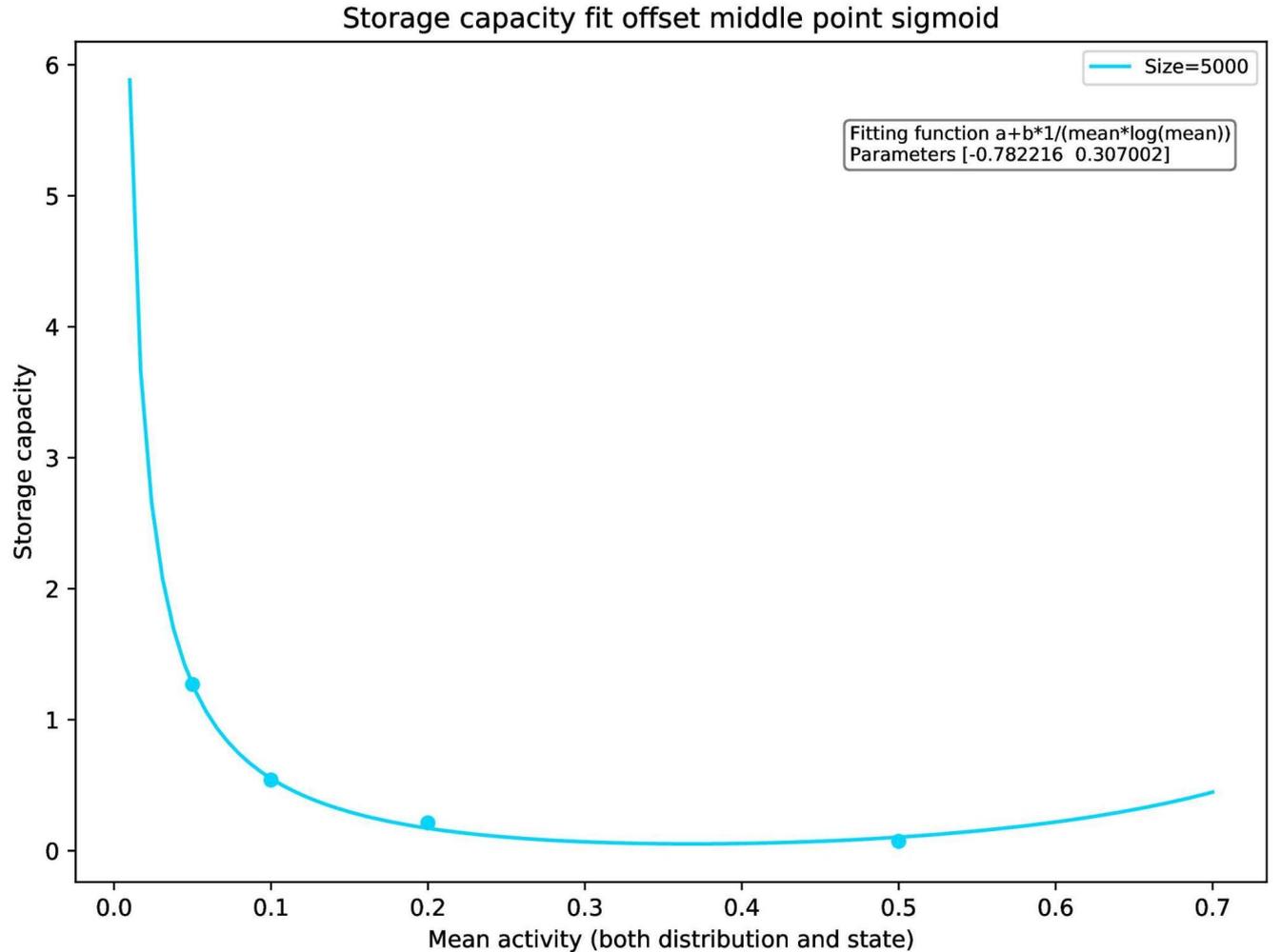
Modifica
dell'ordine di
transizione



Risultati

Fit dipendenza
fra SC e attività
media

$$\alpha_c \sim \frac{1}{2a \ln a}$$



Conclusioni studio

Il risultato principale di questo studio è la dimostrazione computazionale del fatto che l'apprendimento locale non ha i limiti teorici provenienti dal modello di partenza (Ising).

Questo è dovuto dal fatto che il modello di ferromagnetismo assume la distribuzione binaria sia uniforme (tanti nodi attivi quanti nodi inattivi $\{1,-1\}$ o $\{0,1\}$).

La diminuzione dell'attività media rende questo modello, in ambito di neuroscienze computazionale, biologicamente più plausibile data l'attività neurale media misurata sperimentalmente.

Concetto extra - Coarse graining

Complessità del cervello → E.g. funzioni cognitive

Troppe unità interagenti → Riduzione dei gradi di libertà

Perdita di informazione

Possibilità di calcolare
o simulare quello che
prima era impossibile

Il vantaggio

Oppure evitare di
simulare ciò a cui non
siete interessati.

That's it!

CIL:41458, Danio
Rerio, neuron.

