Dinamica su network complessi

Luigi Palmieri

Sommario

- Introduzione
- Laplaciano del grafo
- Esempio semplice di processo diffusivo su un network: modello SI
- Conclusioni

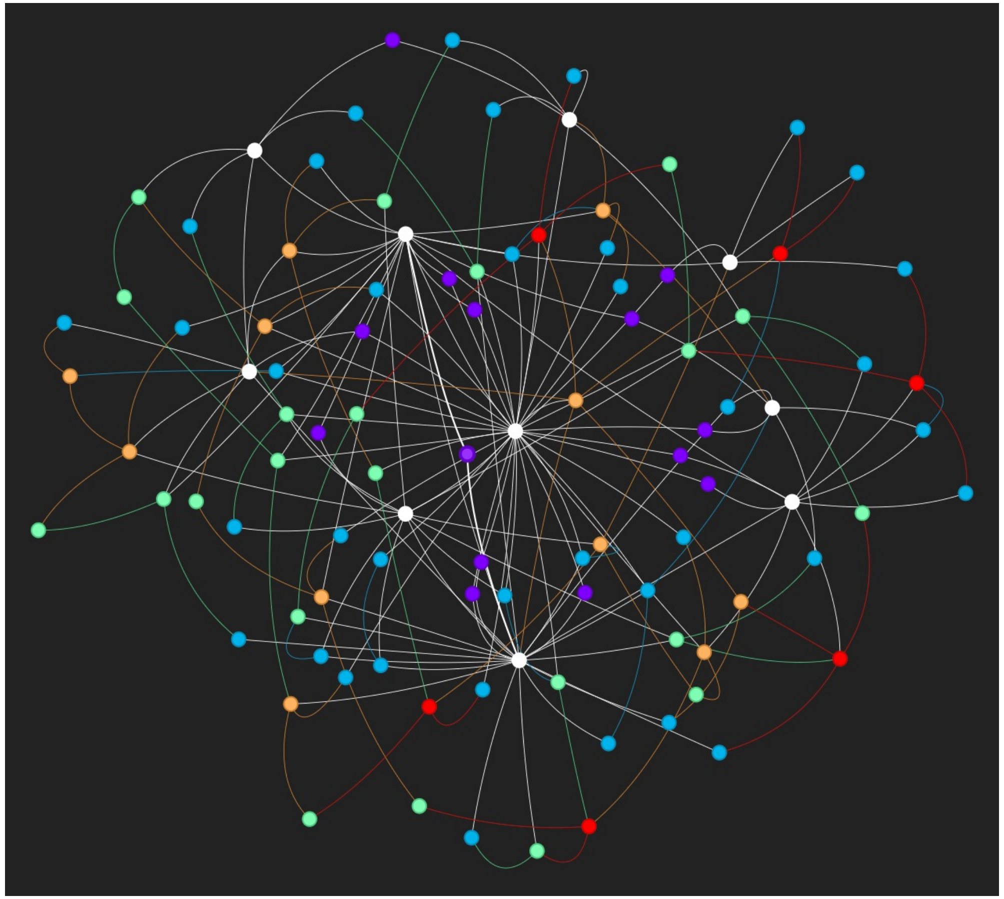
Introduzione

Dalla struttura dei network alle proprietà funzionali

"The ultimate goal in studying networks is to better understand the behavior of the systems networks represent." [Newman, Networks: an introduction]

Studio di un network

Proprietà strutturali   Proprietà funzionali



Definizioni

Network — *Un network è un Sistema composto da nodi (o vertici) e connessioni (o link).*

Sistema dinamico — *Un Sistema dinamico è un qualunque Sistema il cui stato, rappresentato da un set di variabili, cambia nel tempo in accordo con delle regole o equazioni.*

- Un sistema dinamico su un network è un network in cui:
  - I nodi descrivono un elemento del sistema con il suo set di variabili indipendenti.
  - Le connessioni descrivono le interazioni tra gli elementi del network.

Sistemi dinamici su network

- Supponiamo di inscrivere una dinamica sui nodi del network:

$$\frac{ds_i}{dt} = \underbrace{f_i(s_i)}_{\text{Dinamica interna}} + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \underbrace{g_{ij}(s_i, s_j)}_{\text{Dinamica globale}}$$

La dinamica interna dipende solo sull'auto-interazione dei nodi

La dinamica globale dipende sui nodi afferenti.

- s_i è scalare (in questo caso)
- Quindi è possibile definire un processo lungo un network e descrivere il comportamento medio del sistema tracciando l'evoluzione temporale degli stati dei nodi

Esempi di Dinamiche su Network

- Processi diffusivi:
  - Diffusione d'informazione
  - Diffusione di una malattia

- Dinamica sociale:
  - Dinamica di consenso

- Teoria dei giochi:
  - Cooperazione tra gli agenti per massimizzare il risultato

- Attack tolerance:
  - Resistenza ad attacchi, mirati o meno

Laplaciano del grafo

Laplaciano del grafo

- Processi di diffusione
- E’ una matrice che dà informazioni su alcune proprietà strutturali del grafo. Ottenuta applicando un processo di diffusione sul network.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{D} \equiv$ degree matrix, $\boldsymbol{A} \equiv$ adjacency matrix

Laplaciano del grafo

- Supponiamo di avere una qualsivoglia sostanza $\vec{\psi}$ presente sui nodi di un network, che si può muovere lungo i link:

$$\psi_i \equiv \text{sostanza presente nel nodo i} - \text{esimo}$$

- Il flusso dal nodo j al nodo i è descritto da:

$$C(\psi_j - \psi_i)$$

$C \equiv costante\ di\ diffusione$

- La variazione di sostanza al nodo i-esimo è quindi

$$\frac{d\psi_i}{dt} = C \sum_j A_{ij}(\psi_j - \psi_i)$$

Laplaciano del grafo

$$\frac{d\psi_i}{dt} = C\sum_j A_{ij}(\psi_j - \psi_i) = C\,[\sum_j A_{ij}\psi_j - \sum_j A_{ij}\psi_i] = C[\sum_j A_{ij}\psi_j - \psi_i k_i] \Rightarrow$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = C\sum_j (A_{ij} - \delta_{ij}k_i)\psi_j$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} = C(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})\vec{\psi}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & k_N \end{pmatrix} \equiv matrice\ dei\ gradi$$

Laplaciano del grafo

$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} = C(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})\vec{\psi}$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} \equiv Laplaciano\ del\ grafo \Rightarrow \boldsymbol{L} = \begin{cases} k_i, & \text{if } i = j \\ -1 & \text{if } i \neq j\ e\ c'\text{è}\ un\ link\ (i,j) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\psi}}{dt} = -C\boldsymbol{L}\vec{\psi}}$$

Stessa forma dell’equazione di diffusione dei gas
$\boldsymbol{L} \leftrightarrow \nabla^2$

Laplaciano del grafo

Esprimiamo $\vec{\psi}(t)$ in termini degli autovettori del Laplaciano :

$$\vec{\psi}(t) = \sum_j a_i(t)\vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = -C\mathbf{L}\vec{\psi}$$

$$\frac{d}{dt}[\sum_i a_i(t)\vec{v}_i] = -C\mathbf{L}\sum_i a_i(t)\vec{v}_i$$

$$\sum_i (\frac{da_i}{dt} + C\lambda_i a_i)\vec{v}_i = 0 \Rightarrow \frac{da_i}{dt} + C\lambda_i a_i = 0 \Rightarrow \boxed{a_i(t) = a_i(0)e^{-C\lambda_i t}}$$

Proprietà di $\mathbf{L}$

- Simmetrica → autovalori reali
- Non negativa → $\lambda_i \geq 0 \; \forall i$ ⇒ Non ci possono essere esponenziali crescenti in nessun network!
- Ha almeno un autovalore uguale a zero ⇒ l'autovettore unitario è sempre un autovettore del Laplaciano con autovalore uguale a zero

$$\sum_j L_{ij} \times \mathbf{1} = \sum_j (\delta_{ij} k_i - A_{ij}) = k_i - \sum_j A_{ij} = k_i - k_i = 0$$

Utilizzo del Laplaciano del grafo

- Ottenuto tramite processo di diffusione, dà informazioni strutturali sul network
- Graph partitioning

  Supponiamo di avere un grafo suddiviso in *c* componenti disgiunte. Allora il Laplaciano avrà *almeno c* autovalori uguali a zero $\Rightarrow$

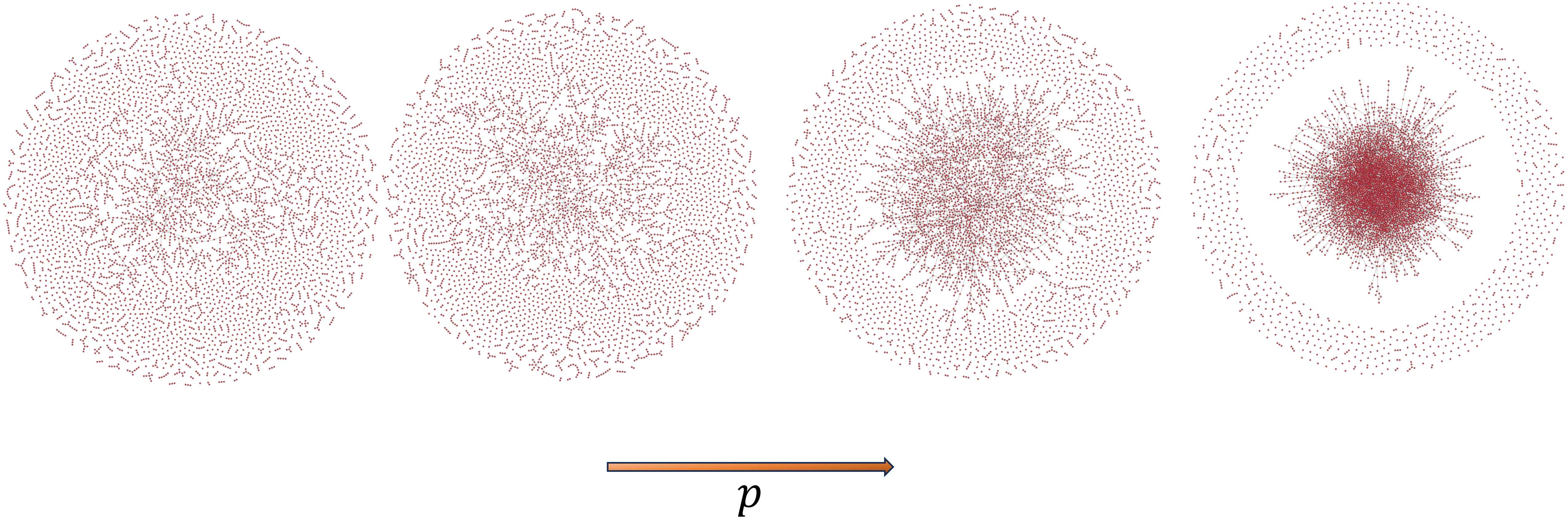
  Il numero di autovalori zero è sempre uguale al numero di componenti del grafo

- *Connettività algebrica*:
  - Misura di quanto bene sia connesso un network.
  - Definita come il secondo autovalore più piccolo del Laplaciano:

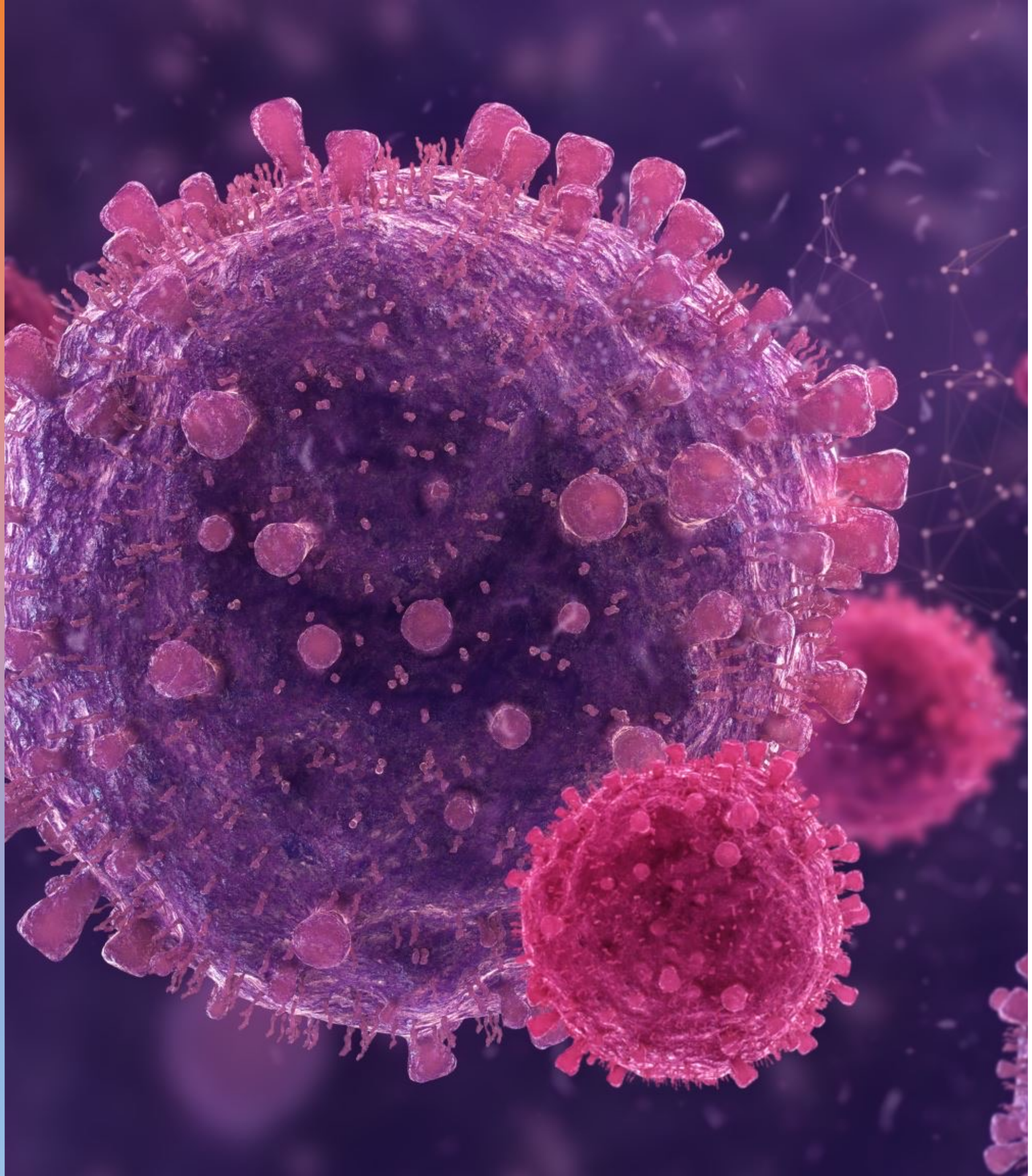
$$\lambda_2 > 0 \iff \text{il network è connesso}$$

  - Utilizzata in un particolare tipo di graph partitioning: Spectral partitioning

Erdos-Renyi, clusterizzazione e graph partitioning



Modello SI

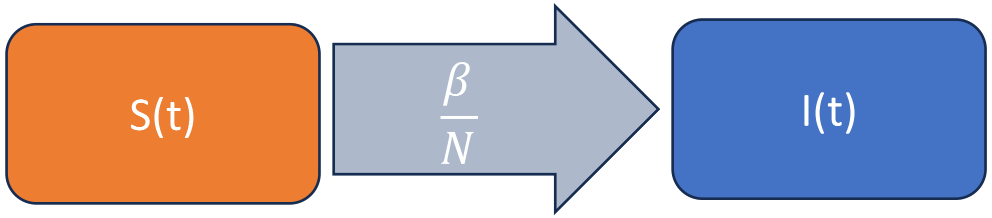


SI model

- Rappresentazione di uno spread epidemico
- SI → 2 stati:
  - *S: susceptible* → individuo sano ma in grado di venire infettato
  - *I: infected* → individuo infetto in grado di passare la malattia

Dinamica del SI

- $S(t) \equiv numero\ di\ individui\ sani,$
  $I(t) \equiv numero\ di\ individui\ infetti$
- La malattia si può trasmettere sono al contatto tra un individuo infetto e uno suscettibile.



$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\beta \dfrac{S\, I}{N} \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \beta \dfrac{S\, I}{N} \end{cases}$$

$\beta \equiv rate\ di\ contatto$

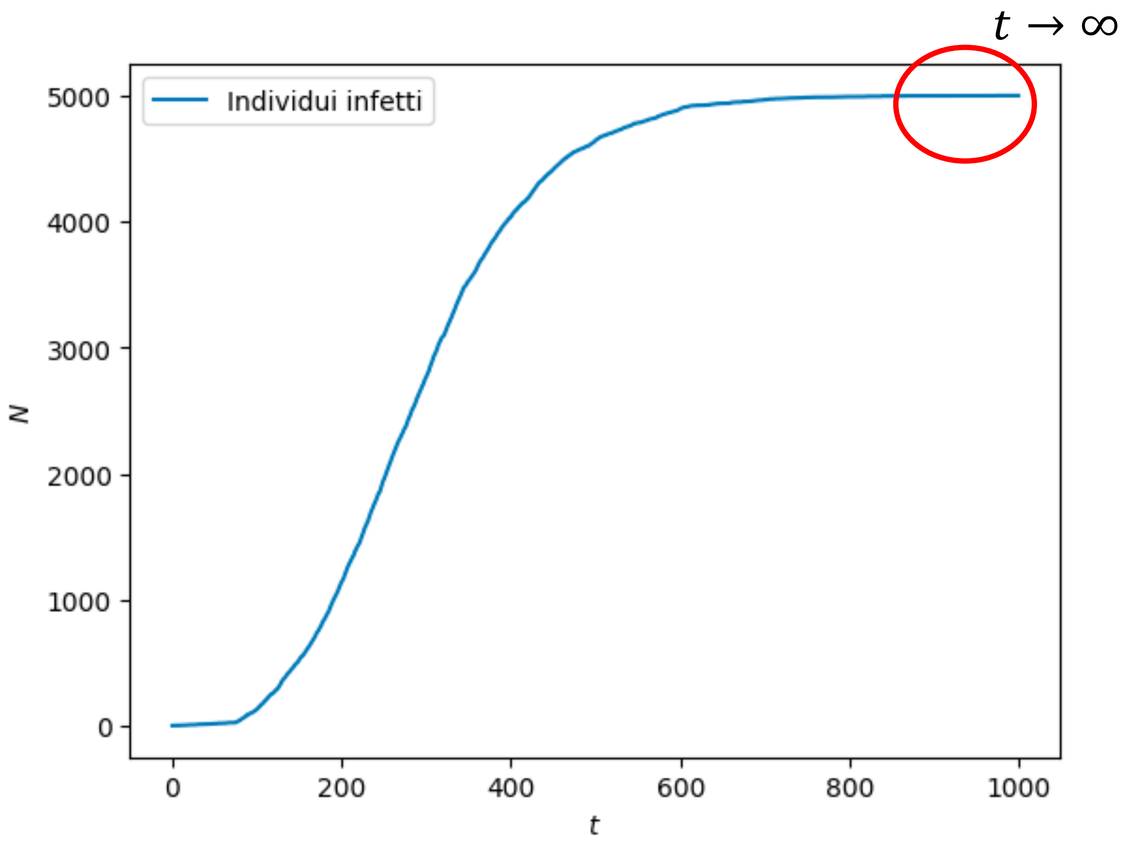
Soluzione *Fully mixed*

- Non si tiene in considerazione un network: ciascun individuo ha una possibilità uguale, al tempo *t*, di entrare in contatto con ciascun altro.

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\beta \dfrac{S\,I}{N} \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \beta \dfrac{S\,I}{N} \end{cases} \xrightarrow[\bullet\ i = \frac{I}{N}]{\bullet\ s = \frac{S}{N}} \begin{cases} \dfrac{ds(t)}{dt} = -\beta\, s\, i \\ \dfrac{di(t)}{dt} = \beta\, s\, i \end{cases}$$

$$N = S + I \Rightarrow s + i = 1$$

$$\frac{di}{dt} = \beta(1 - i)i \Rightarrow \frac{1}{(1 - i)i} di = \beta dt \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{i_o e^{\beta t}}{1 - i_o + i_o e^{\beta t}}}$$



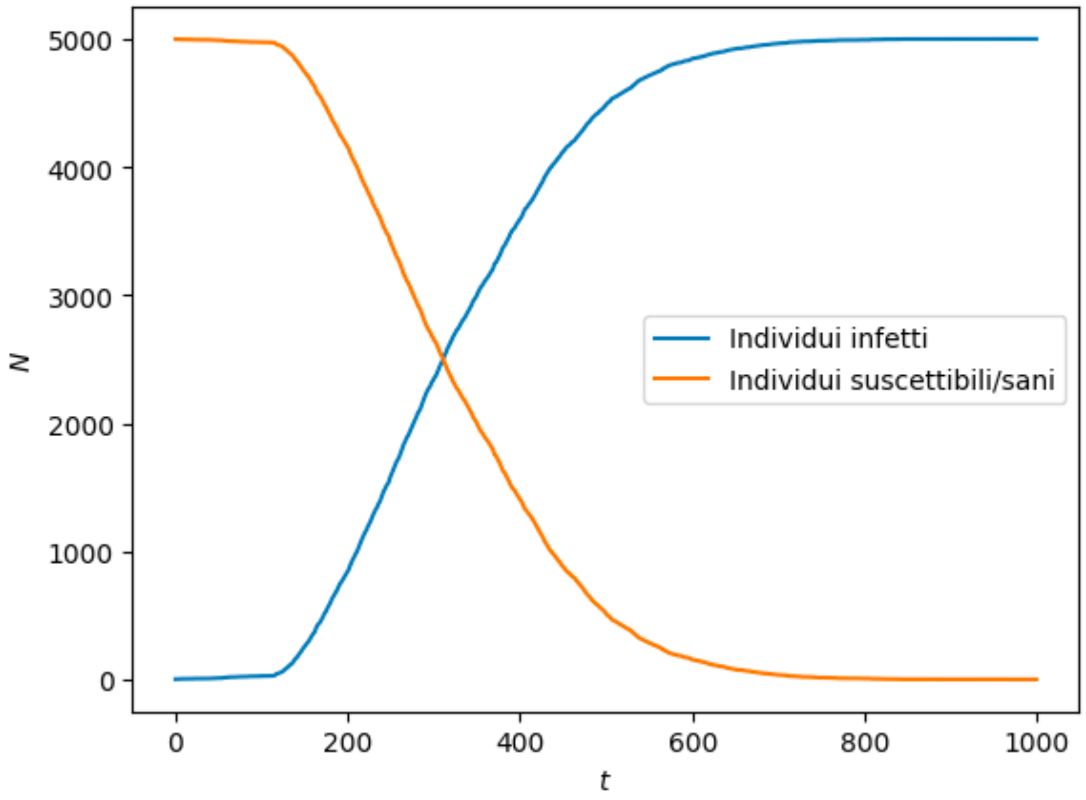
Barabasi – Albert con 5000 nodi e m = 1

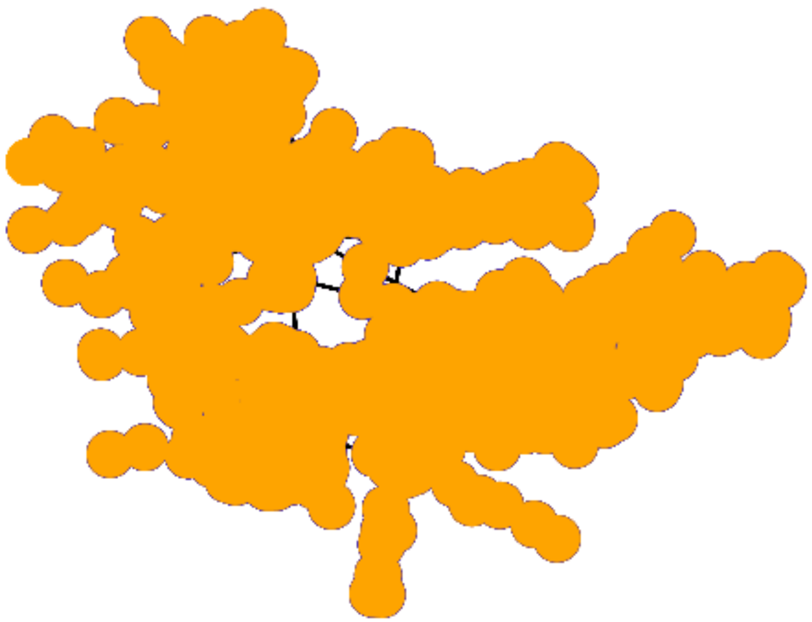
A small initial number of infected individuals in an 51 model (1% in this example) will at first grow exponentially as they infect others, but growth eventually saturates as the supply of susceptible individuals is exhausted, and the curve levels off at $x = 1$.

Epidemia su grafo

- L'ipotesi della soluzione Fully mixed non è realistica
- Si definisce il valore da dare al rate di contatto e si simula l'andamento per diverse configurazioni.
- Comportamento a $t \to \infty$: tutti i nodi connessi tra loro e con almeno un nodo infetto diventeranno anch'essi infetti

Esempio con Barabasi Albert con m = 2



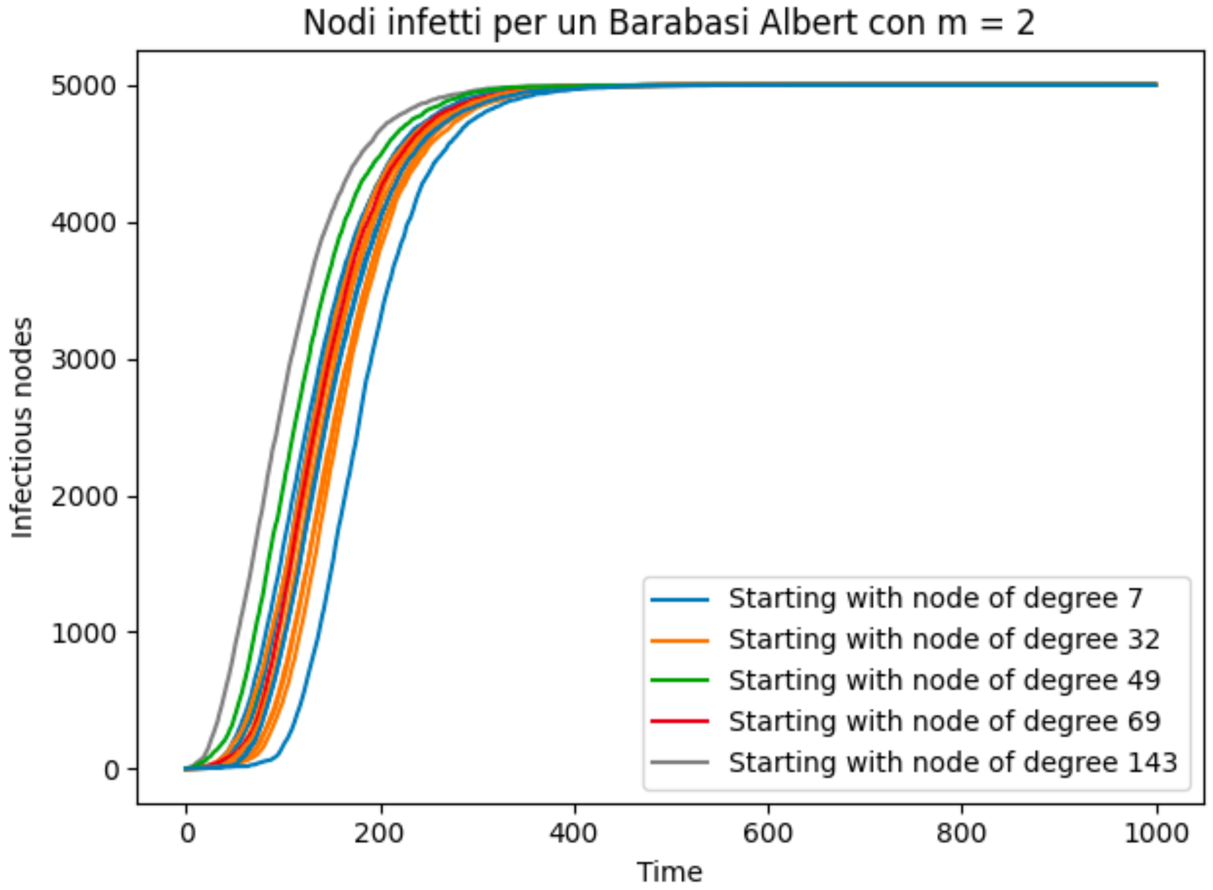


Spreading epidemico e dipendenza dalla struttura del network

Lo spreading dipende non solo dal rate di contatto ma anche dal grado del nodo infetto.

$\Downarrow$

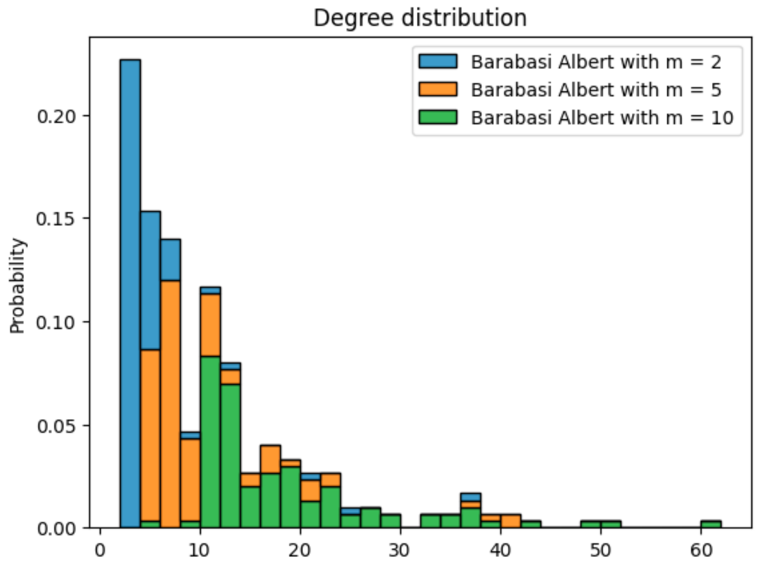
Un grado maggiore implica un maggior numero di connessioni e quindi di possibili individui suscettibili da infettare.



Simulazioni di uno spreading epidemico di tipo SI su un Barabasi-Albert con m = 2 con diverso nodo iniziale

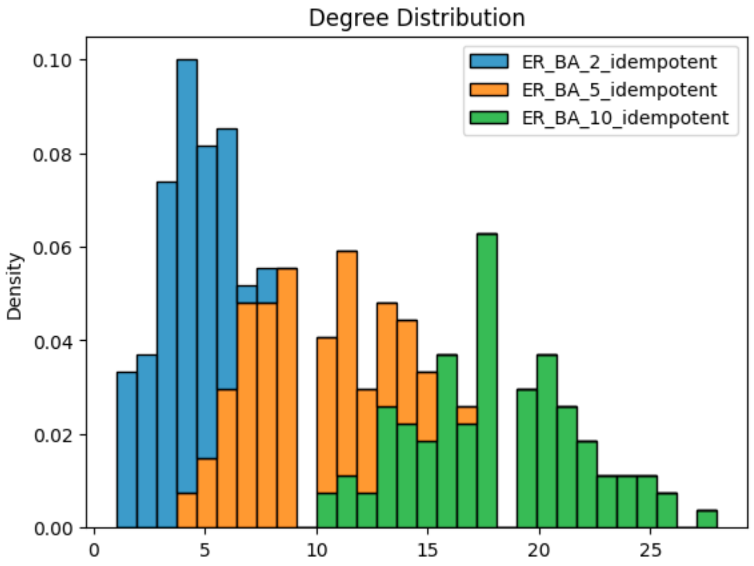
Spreading epidemico e dipendenza dalla struttura del network

Barabasi-Albert



Distribuzione a coda pesante: pochi nodi con grado alto e molti nodi con grado basso

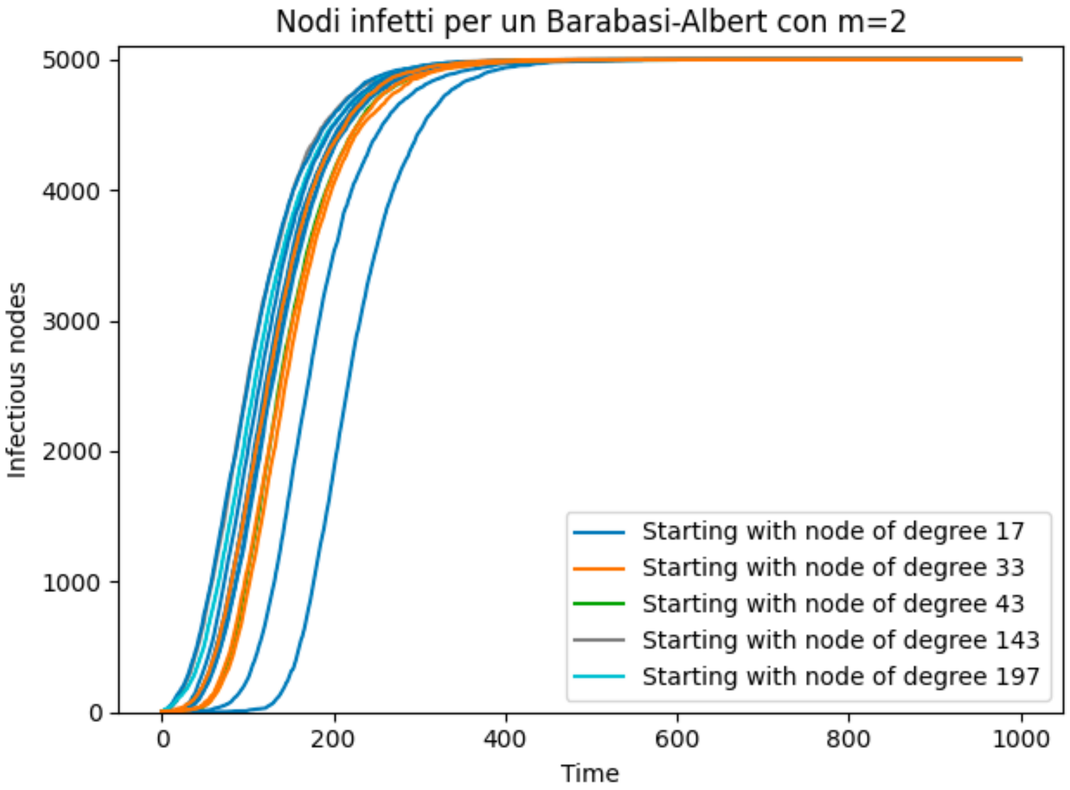
Erdos-Renyi

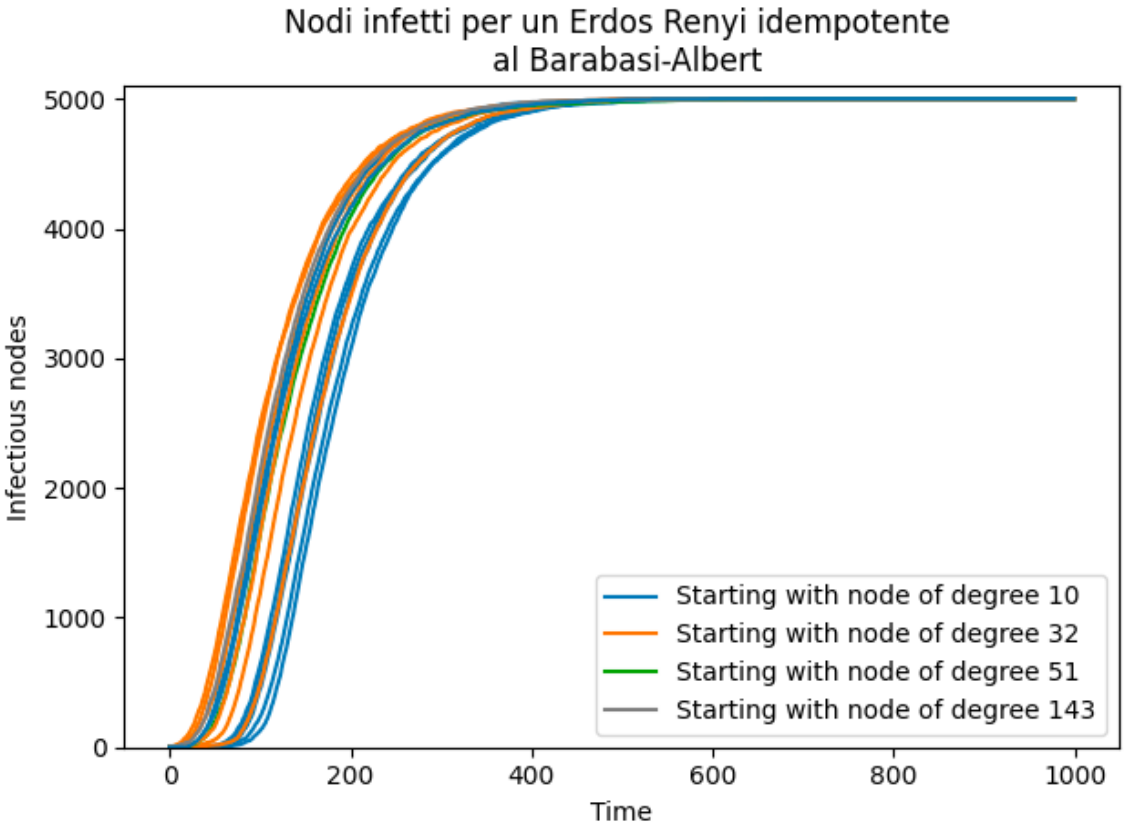


Distribuzione random

Per il Barabasi-Albert è probabilisticamente più facile prendere nodi con basso grado.
Tuttavia se viene preso il nodo con grado più alto si è in grado d’infettare il network ad una velocità molto più alta **(Robustness)**

Spreading epidemico e dipendenza dalla struttura del network



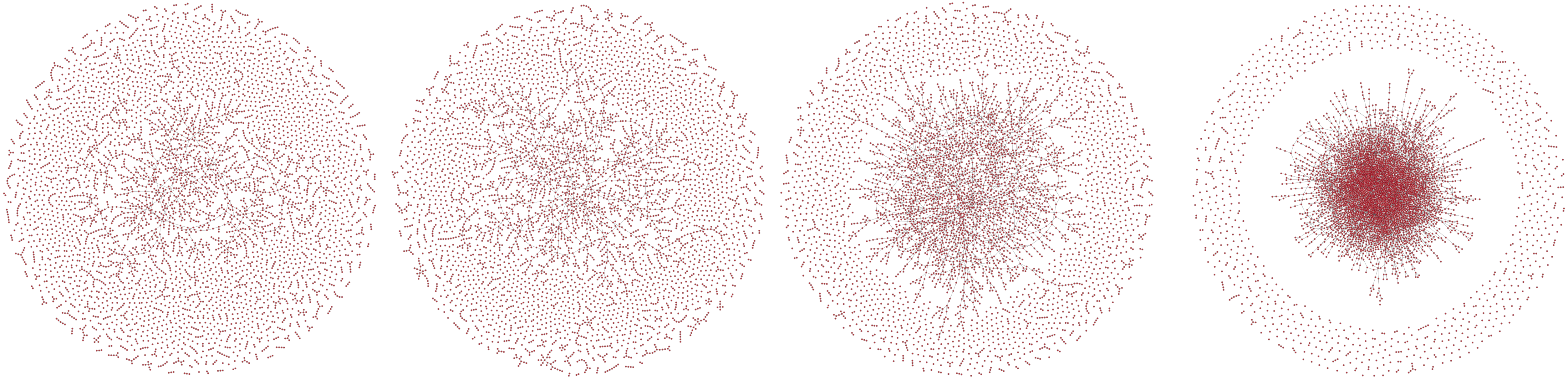


Modello SI e Laplaciano del grafo

- Comportamento a $t \to \infty$: tutti i nodi connessi tra loro e con almeno un nodo infetto diventeranno anch’essi infetti
- Cosa succede se il grafo ha delle componenti disgiunte?
- Dagli autovalori del laplaciano possiamo estrarre il numero di componenti del grafo (Graph partitioning)

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \square & 0 & \cdots \\ 0 & \square & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Erdos-Renyi (5000 nodi) con valori crescenti di p appena sopra il valore limite per la creazione di un giant component

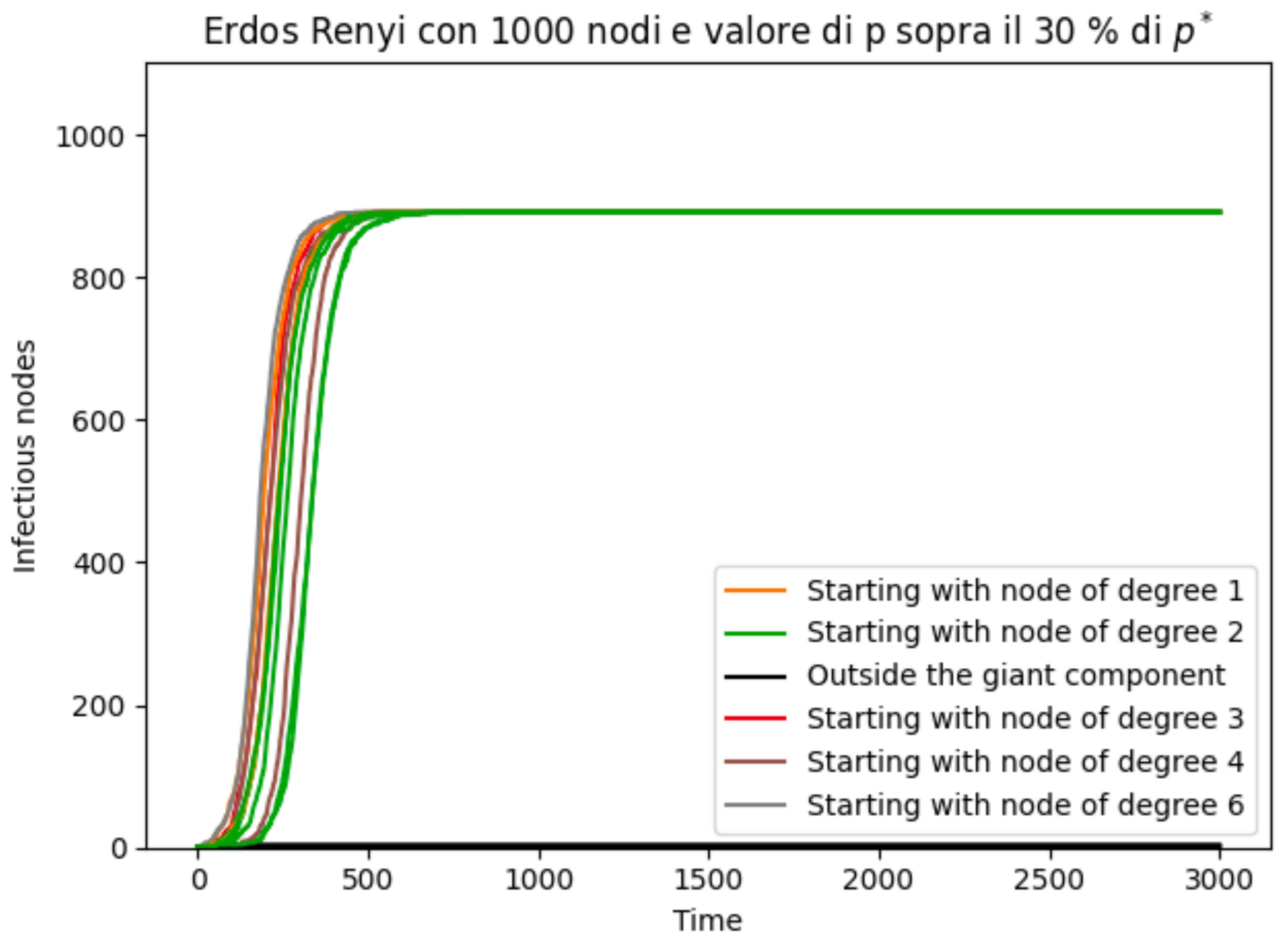


$$p$$

$$p^* = 1/(N-1)$$

Il più grande componente connesso

- Si può utilizzare il Laplaciano per calcolare il numero di componenti del grafo e ottenere la grandezza del più grande componente connesso.
- La dimensione del componente più grande del grafo determina il valore del più alto numero di elementi che possono essere infettati nel network



Gruppo di rinormalizzazione su grafi

- Il laplaciano regola l'evoluzione dell'informazione di un dato stato iniziale del network s(0), che evolve nel tempo come:

$$s(\tau) = e^{-\tau\hat{L}}s(0)$$

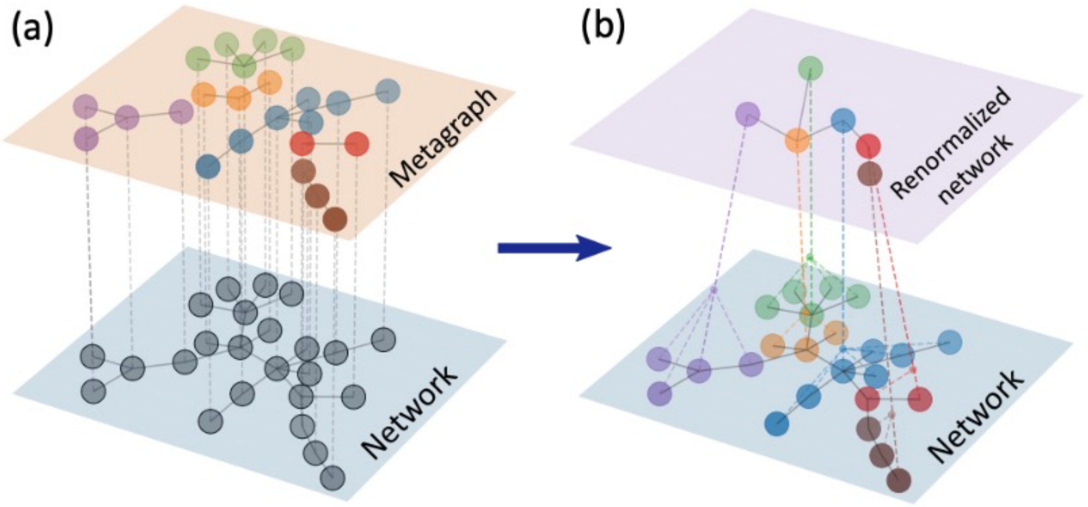
- Propagatore dell'informazione: $\widehat{K} = e^{-\tau\hat{L}}$

$$\rho(\tau) = \frac{\widehat{K}}{Tr(\widehat{K})} = \frac{e^{-\tau\hat{L}}}{Tr(e^{-\tau\hat{L}})}$$

- Due nodi processano informazione reciprocamente quando raggiungono un valore più grande o uguale alle informazioni contenute in uno dei due nodi interessati.

$$\rho' = \frac{\rho_{ij}}{\min(\rho_{ii}, \rho_{jj})}$$

Traccia è la somma su tutti i possibili percorsi, di conseguenza è una somma su tutte le possibili evoluzioni del sistema (traccia sul propagatore), quindi quella è la densità di informazione accessibile



1. Build the network meta graph composed of heterogeneous disjoint blocks of n_i nodes for $\tau \sim \tau^*$, as established by the information network defocusing
2. Replace each block of connected nodes with a single supernode.
3. Consider supernodes as a single node incident to any edge to the original n_i nodes.
4. Renormalize

Conclusioni

- Processo di diffusione sui nodi: Laplaciano del grafo
- Proprietà strutturali del network influenzano l'evoluzione temporale del sistema
- Modello di spreading epidemico
- A cosa stare attenti?:
  - Influenza delle proprietà principali del network
  - Influenza secondaria: gradi dei nodi ma anche dove si trovano rispetto al network.

References

- Newman, M. (2018). *Networks*. Oxford university press.
- Villegas, P., Gili, T., Caldarelli, G., & Gabrielli, A. (2023). Laplacian renormalization group for heterogeneous networks. *Nature Physics*, *19*(3), 445-450.
- Barabási, A. L. (2013). Network science. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *371*(1987), 20120375.